

# 2025 学年第一学期期中考试八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	18	24	30	18	10	100
得分						

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列实数中是无理数的是 (C).

- (A)  $\frac{3}{7}$ ; (B)  $\sqrt[3]{27}$ ; (C)  $\sqrt{5}$ ; (D)  $\sqrt{25}$ .

2. 下列各式中, 与  $\sqrt{12}$  是同类二次根式的是 (D).

- (A)  $\sqrt{0.3}$ ; (B)  $\sqrt{8}$ ; (C)  $\sqrt{24}$ ; (D)  $\sqrt{75}$ .

3. 下列二次根式中, 最简二次根式是 (B).

- (A)  $\sqrt{4x}$ ; (B)  $\sqrt{x^2+2}$ ; (C)  $\sqrt{3x^2}$ ; (D)  $\sqrt{\frac{x}{2}}$ .

4. 下列说法正确的有 (B).

- ①有限小数一定是有理数; ②有理数一定是有限小数;  
③任何一个无限循环小数都可以化成分数; ④任何一个分数都可以化成小数;  
⑤任何一个无限小数都是有理数.

- (A) 2 个; (B) 3 个; (C) 4 个; (D) 5 个.

5. 用配方法解一元二次方程  $x^2 - 2x - 2025 = 0$ , 将它转化为  $(x+a)^2 = b$  的形式, 则  $a^b$  的值为 (A).

- (A) 1; (B) -1; (C) 2026; (D) -2026.

6. 欢欢和乐乐对关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  展开讨论,

欢欢: 若  $b - 2ac = 1$ , 则方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  一定有两个不相等的实数根;

乐乐: 若方程  $ax^2 + c = 0 (a \neq 0)$  有两个不相等的实根, 则方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  必有两个不相等的实根.

下列判断正确的是 (C).

- (A) 欢欢正确, 乐乐错误; (B) 欢欢错误, 乐乐正确;  
(C) 欢欢、乐乐都正确; (D) 欢欢、乐乐都错误.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7.  $\sqrt{16}$  的平方根是  $\pm 2$ .

8. 比较大小:  $2$   $>$   $\sqrt{7}$  (填 “>”、“=” 或 “<”).

9. 若一个整数用科学记数法表示为  $1.216 \times 10^{10}$ , 则原数中 “0” 有  $7$  个.

10. 若  $\sqrt{x}$  和  $\sqrt{-x}$  都有意义, 则  $\sqrt{x+1} = 1$ .

11. 不等式  $\sqrt{6x} + 2\sqrt{3} < 0$  的解集为  $x < -\sqrt{2}$ .

12. 化简:  $xy < 0, \sqrt{48x^2y^3} = -4x\sqrt{3y}$ .

13. 将循环小数  $0.\dot{1}\dot{2}$  化成分数是  $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ .

14. 若关于  $x$  的方程  $(k-4)x^{k+2} + (2k-3)x + 4 = 0$  是一元二次方程, 则  $k = -4$ .

15. 定义: 不超过实数  $x$  的最大整数称为  $x$  的整数部分, 记作  $[x]$ , 例如  $[\sqrt{3}] = 1$ ,  $[-\sqrt{5}] = -3$ , 按此规定, 则  $[1 - \sqrt{10}] = -3$ .

16. 2025 年 10 月, 诺贝尔物理学奖表彰了科学家在超导电路中发现了宏观量子现象, 在超导电路中, 量子比特的 “共振频率” 很关键. 已知某种量子比特的两个共振频率  $f_1$  和  $f_2$  (单位:  $10^9$  赫兹) 满足以下条件: ①两个频率的和为 8; ②以这两个频率为根的一元二次方程, 其一次项系数的 2 倍与常数项的和, 等于两根的差的平方. 设该一元二次方程为  $x^2 + bx + c = 0$  (其中  $b, c$  是实数), 则可求得  $c = 16$ .

17. 观察下列各式:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2};$$

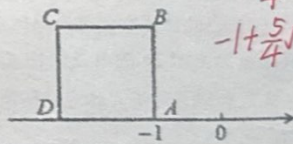
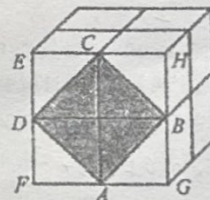
$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1\frac{1}{6};$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{12}.$$

请你根据以上信息, 计算  $\sqrt{1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}} = 1\frac{1}{56}$ . (直接写出计算结果)

18. 如图①, 由 8 个同样大小的正方体组成一个 “二阶魔方”, 整个魔方的体积为  $15\frac{5}{8}$ .

图①中阴影部分是一个正方形 ABCD, 它的面积是魔方侧面 EFGH 面积的一半. 若把正方形 ABCD 放到数轴上, 如图②, 使得点 A 与 -1 重合, 若以点 A 为圆心, AD 的长为半径画圆, 与数轴交于点 M, 那么点 M 在数轴上表示的数为  $-1 - \frac{5}{4}\sqrt{2}$ .



第 18 题图

②

$$\frac{25}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{8} \quad AB = \sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$$





三、简答题 (本大题共 5 题, 每题 6 分, 满分 30 分)

19. 计算:  $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{-27} - 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}\sqrt{8}$ .

原式 =  $3 - 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$

20. 计算:  $\frac{2}{5}\sqrt{0.6} \times \frac{5}{6}\sqrt{\frac{3}{10}} + 2\sqrt{3}$ .

原式 =  $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} \times \sqrt{\frac{0.6 \times 3}{10 \times 10}} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{6} + 2\sqrt{3}$

22. 已知  $x = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ , 求  $\frac{x^2-4x+5}{x-2}$  的值.

原式 =  $\frac{x^2-4x+5}{x-2} = \frac{(\sqrt{5}+2)^2-4(\sqrt{5}+2)+5}{\sqrt{5}+2-2} = \frac{5+4\sqrt{5}+4-4\sqrt{5}-8+5}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

23. 已知  $x_1, x_2$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + (2m+3)x + m^2 + 1 = 0$  的两个实数根, 且  $x_1^2 + x_2^2 = 21$ , 求  $m$  的值.

$x_1 + x_2 = -2m-3$   $x_1 x_2 = m^2 + 1$   
 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 21$   
 $\Delta = (2m+3)^2 - 4(m^2+1) = 12m+5 \geq 0$

$\Delta = (2m+3)^2 - 4(m^2+1) = 12m+5 \geq 0$   
 $m = -\frac{5}{12}$

四、解答题 (本大题共 3 题, 第 24 题、第 25 题各 5 分, 第 26 题 8 分, 满分 18 分)

24. 乐乐同学在解方程  $x(2-x) = 3(x-2)$  时出现了错误, 他的解答过程如下:

解: ① 原方程可变形为  $x(2-x) = -3(2-x)$ .

② 方程两边同时除以  $(2-x)$ , 得  $x = -3$ .

③ 所以, 原方程的根是  $x = -3$ .

(1) 上述解答过程是从第 ② 步开始出错的,

其错误原因是  $2-x$  有可能为 0

(2) 请写出正确的解答过程.

$(x+3)(2-x) = 0$   
 $x+3=0$  或  $2-x=0$   
 $x_1 = -3$   $x_2 = 2$

25. 高空抛物是一种不文明的危险行为, 据研究, 从高处坠落的物体, 其下落的时间  $t$  (单位: s) 和下落高度  $h$  (单位: m) 近似满足公式  $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$  (不考虑阻力的影响).

(1) 物体从 20 m 的高空落到地面的时间为  $2$  s.

(2) 已知从高空坠落的物体所带能量 (单位: J) =  $10 \times$  物体质量 (kg)  $\times$  高度 (m). 一个质量为 0.05 kg 的鸡蛋经过 6 s 落到地面, 这个鸡蛋在下落过程中产生的能量有多大? 会对无防护人体造成伤害吗? (注: 伤害无防护人体只需要  $50\sqrt{2}$  J 的能量)

$t = \sqrt{\frac{h}{5}}$   
 $h = 5t^2$

$10 \times 0.05 \times h = 10 \times 0.05 \times 5t^2$

$= 0.5 \times 5 \times 6^2$

$= 2.5 \times 6 \times 6$

$= 90$

$90^2 = 8100$

$(50\sqrt{2})^2 = 5000$

$\therefore 90 > 50\sqrt{2}$

$\therefore$  会对人体造成伤害

$\therefore m = -2$  或  $m = -4$

当  $m = -2$  时  $\frac{5m}{m-1} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$

$\frac{5m}{(m+3)(m-1)} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3} \therefore m = -2$

当  $m = -4$  时  $\frac{5m}{m-1} = \frac{-20}{-5} = 4$   $\frac{5m}{(m+3)(m-1)} = -4 \therefore 4+4 \therefore m = -4$  舍去

$\therefore m = -2$  此时方程根为  $x_1 = -3$   $x_2 = -\frac{1}{3}$

26. 定义: 关于  $x$  的一元二次方程  $cx^2 + bx + a = 0$  (其中  $a, b, c$  是实数, 且  $ac \neq 0$ )

是关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  (其中  $a, b, c$  是实数, 且  $ac \neq 0$ ) 的“友好方程”. 例如:  $-2x^2 - x + 1 = 0$  是  $x^2 - x - 2 = 0$  的“友好方程”. 求:

(1) 方程  $3x^2 - 2x - 4 = 0$  的“友好方程”是  $-4x^2 - 2x + 3 = 0$ .

(2) 若关于  $x$  的一元二次方程  $cx^2 + bx + a = 0$  (其中  $a, b, c$  是实数, 且  $ac \neq 0$ ) 的一个解为 3, 请判断  $\frac{1}{3}$  是否为该方程的“友好方程”的一个解? 请说明理由.

(3) 若关于  $x$  的一元二次方程  $(m-1)x^2 + 5mx + (m^2 + 2m - 3) = 0$  (其中  $m$  是实数) 与它的“友好方程”有完全相同的解, 求  $m$  的值以及原方程的根.

(2) ① 友好方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $ac \neq 0$ )  
② 友好方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $ac \neq 0$ )  
③  $m \neq 0$  ( $m+3)(m-1) \neq 0$   
 $\therefore m \neq 1$  且  $m \neq -3$

$x = 3$  是原方程根  $\therefore 9c + 3b + a = 0$   
当  $x = \frac{1}{3}$  时代入② 左边 =  $\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{3}b + c$   
 $= \frac{1}{9}(a^2 + 3b + 9c) = 0 =$  右边

五、综合题 (本大题满分 10 分)  
27. 阅读下面材料: 将边长分别为  $a, a + \sqrt{b}, a + 2\sqrt{b}, a + 3\sqrt{b}$  的正方形面积分别记为  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , 则  $S_2 - S_1 = (a + \sqrt{b})^2 - a^2 = [a + \sqrt{b}] \cdot [a + \sqrt{b}] - a^2 = 2a\sqrt{b} + b$ . 例如: 当  $a = 1, b = 3$  时,  $S_2 - S_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ .

以上材料解答下列问题:  
(1) 当  $a = 1, b = 3$  时,  $S_3 - S_2 = 2\sqrt{3} + 9$ ;  $S_4 - S_3 = 2\sqrt{3} + 15$

(2) 当  $a = 1, b = 3$  时, 把边长为  $a + n\sqrt{b}$  的正方形面积记作  $S_{n+1}$ , 其中  $n$  是正整数.  $S_4 = (a + 3\sqrt{b})^2 = a^2 + 6a\sqrt{b} + 9b$   
 $S_3 = (a + 2\sqrt{b})^2 = a^2 + 4a\sqrt{b} + 4b$   
 $S_2 = (a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$   
 $S_1 = a^2$

从 (1) 中的计算结果, 你能猜出  $S_{n+1} - S_n$  等于多少吗? 并证明你的猜想.  
(3) 当  $a = 2, b = 5$  时, 令  $t_1 = S_2 - S_1, t_2 = S_3 - S_2, t_3 = S_4 - S_3, \dots, t_n = S_{n+1} - S_n$ , 且  $T_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$ , 若  $T_n - 4\sqrt{5}n = 28n + 12$ , 求  $n$  的值.

(2)  $S_{n+1} - S_n = (a + n\sqrt{b})^2 - [a^2 + 2an\sqrt{b} + n^2b] = a^2 + 2an\sqrt{b} + n^2b - [a^2 + 2an\sqrt{b} + n^2b] = 2a\sqrt{b} + b$   
(3)  $T_n = S_{n+1} - S_1 = (a + n\sqrt{b})^2 - a^2 = 2an\sqrt{b} + n^2b$   
当  $a = 2, b = 5$  时  $T_n = 4\sqrt{5}n + 5n^2$   
 $T_n - 4\sqrt{5}n = 28n + 12$   
 $5n^2 - 28n - 12 = 0$   
 $(5n + 2)(n - 6) = 0$   
 $n_1 = -\frac{2}{5}$   $n_2 = 6$